CEVAP ANAHTARI

Adı-Soyadı: **24.11.2019**
Numarası:

MAT 203 ANALİTİK GEOMETRİ I ARASINAV SORULARI

1. Aralarında 60^o lik açı bulunan xoy eğik koordinat sisteminde $O'(2,4)$ noktası veriliyor. $x'o'y'$ dik koordinat sisteminde verilen $A(3,3)$ noktasının xoy eğik koordinat sistemindeki koordinatlarını bulunuz. ($m(xx') = 0^o$)

2. $P=(1,2,0)$, $Q=(3,0,-3)$, $R=(5,2,6)$ noktaları verilsin. Vektörel çarpım kullanarak PQR üçgeninin alanını hesaplayınız.

3. Kartezyen koordinatları $P=(1,1,-\sqrt{2})$ olan noktanın küresel koordinatlarını bulunuz.

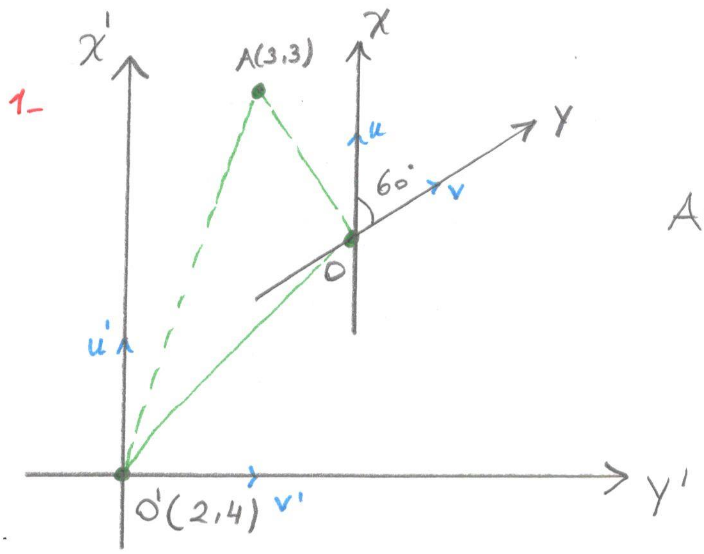
4. $P=(1,0,1)$ noktasından geçen ve $d\ldots\begin{cases} x=1+t \\ y=t \\ z=2 \end{cases}$ doğrusunu dik olarak kesen doğrunun denklemini bulunuz.

5. $E_1\ldots mx+my+z=3$
$E_2\ldots \quad my-z=-3$
$E_3\ldots x+my+z=1$ düzlemlerinin ortak bir d doğrusuna sahip olmaları için m ne olmalıdır. d doğrusunun denklemini bulunuz.

NOT: Sorular eşit puanlı olup süre 90 dakikadır.

BAŞARILAR
Prof. Dr. Emin KASAP

1-



$\vec{OA} = \vec{OO'} + \vec{O'A}$ yazılır.
Ayrıca;
xoy sistemi için $\{\vec{u},\vec{v}\}$
$x'o'y'$ sistemi için $\{\vec{u'},\vec{v'}\}$
bazlarını ele alalım. Burada,

$$\begin{cases} \vec{OA} = x_0\vec{u} + y_0\vec{v} \\ \vec{OO'} = 2\vec{u} + 4\vec{v} \\ \vec{O'A} = 3\vec{u'} + 3\vec{v'} \end{cases}$$ olmak üzere

$$x_0\vec{u} + y_0\vec{v} = 2\vec{u} + 4\vec{v} + 3\vec{u}' + 3\vec{v}'$$

$\Rightarrow (x_0-2)\vec{u} + (y_0-4)\vec{v} = 3\vec{u}' + 3\vec{v}'$ yazılır.

- Her iki tarafı $\vec{u}$ ile iç çarpalım:

$$(x_0-2) + (y_0-4)\langle\vec{v},\vec{u}\rangle = 3\langle\vec{u}',\vec{u}\rangle + 3\langle\vec{v}',\vec{u}\rangle$$

$$\Rightarrow x_0 - 2 + (y_0-4)\cos 60^\circ = 3.\cos 0^\circ + 3.\cos 90^\circ$$

$$\Rightarrow x_0 - 2 + \frac{y_0-4}{2} = 3$$

$$\Rightarrow 2x_0 + y_0 = 14 \ \ldots (1)$$

- Her iki tarafı $\vec{v}$ ile çarpalım:

$$(x_0-2)\langle\vec{u},\vec{v}\rangle + (y_0-4) = 3\langle\vec{u}',\vec{v}\rangle + 3\langle\vec{v}',\vec{v}\rangle$$

$$\Rightarrow (x_0-2)\cos 60^\circ + y_0 - 4 = 3\cos 60 + 3\cos 30^\circ$$

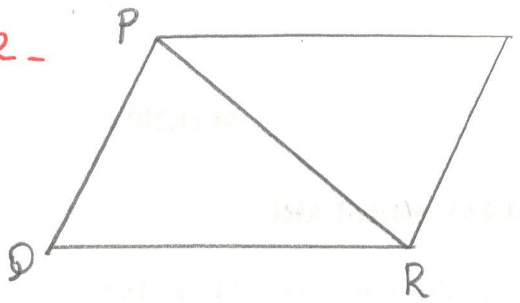
$$\Rightarrow \frac{x_0-2}{2} + y_0 - 4 = \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow x_0 + 2y_0 = 13 + 3\sqrt{3} \ \ldots (2)$$

(1) ve (2) den

$$\begin{cases} x_0 = 4 + 2\sqrt{3} \\ y_0 = 5 - \sqrt{3} \end{cases}$$

bulunur.

2- 

$\overset{\Delta}{PQR}$ nin alanı S olsun.

$$\Rightarrow S = \frac{1}{2} \|\vec{PQ} \wedge \vec{PR}\|$$

şeklinde hesaplanır.

$$\vec{PQ} = Q - P = (2, -2, -3)$$
$$\vec{PR} = R - P = (4, 0, 6)$$ olmak üzere

$$\vec{PQ} \wedge \vec{PR} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} = (-12, -24, 8)$$

$$\Rightarrow \|\vec{PQ} \wedge \vec{PR}\| = \sqrt{12^2 + 24^2 + 8^2} = 28$$ olup

$$\Rightarrow S = 14$$ bulunur.

3- $P(\underbrace{1}_{=x}, \underbrace{1}_{=y}, \underbrace{-\sqrt{2}}_{=z}) \longrightarrow (r, \alpha, \beta)$

$$\begin{cases} x = r\cos\alpha \sin\beta \\ y = r \sin\alpha \sin\beta \\ z = r\cos\beta \end{cases}, \quad r = \mp\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$ olmak üzere

$$r = \mp\sqrt{1+1+2} = \mp 2$$ olur. Ayrıca

$$\begin{cases} x = r\cos\alpha\sin\beta \\ y = r\sin\alpha\sin\beta \end{cases} \Rightarrow \tan\alpha = \frac{y}{x}$$ olup

$$\tan\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = 45^\circ, 225^\circ$$ elde edilir.

Yine; $z = r\cos\beta$ eşitliğinden

$\beta = 45^\circ$, $\beta = 135^\circ$, $\beta = 225^\circ$, $\beta = 315^\circ$ bulunur.

$r = 2$ → $\alpha = 45°$, $\alpha = 225°$

$r = -2$ → $\alpha = 45°$, $\alpha = 225°$

$r=2$, $\alpha = 45°$:

$x = r\cos\alpha\sin\beta$

(+) (+) (+) $\boxed{\text{(+) olmalıdır.}}$

$y = r\sin\alpha \sin\beta$

(+) (+) (+) $\boxed{\text{(+) olmalıdır}}$

$z = r\cos\beta$

(−) (+) (−) olmalıdır.

$\beta = 135°$ dur

$r=2$, $\alpha = 225°$: Benzer incelemeyle $\beta = 225°$ dur.

$r=-2$: Benzer incelemelerle

$\alpha = 45°$ için $\beta = 315°$, $\alpha = 225°$ için $\beta = 45°$

O halde P nin küresel koordinatları

$(2, 45°, 135°)$, $(2, 225°, 225°)$, $(-2, 45°, 315°)$, $(-2, 225°, 45°)$

bulunur.

4- Aranılan doğru denklemi

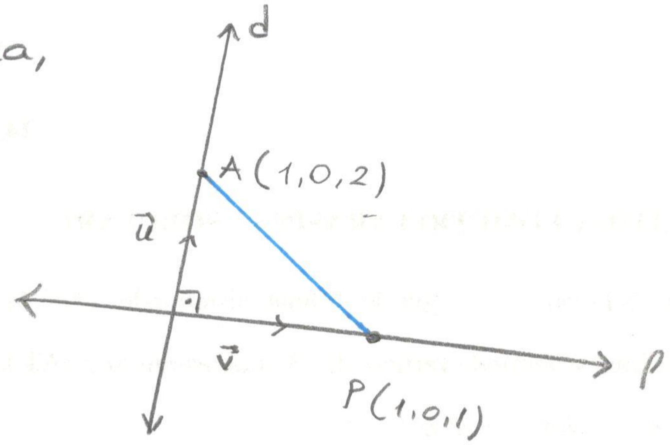
$$\ell \dots \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} = \lambda \text{ oü.}$$

d nin doğrultmanı $\vec{u} = (1,1,0)$ için

$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle (1,1,0), (a,b,c) \rangle = 0$ olmalıdır.

$\Rightarrow \quad a + b = 0$ bulunur.

Ayrıca,



$A \in d$ ve $P \in \ell$ için

$\vec{AP} = (0,0,-1)$ olur.

$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{AP}) = 0$ dır. Buradan,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a & b & c \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow a - b = 0 \text{ bulunur.}$$

Öyleyse, $\begin{cases} a+b=0 \\ a-b=0 \end{cases} \Rightarrow a=b=0$ elde edilir ki

ℓ doğrusunun denklemi

$$\frac{x-1}{0} = \frac{y}{0} = \frac{z-1}{c} = \lambda \text{ bulunur.}$$

5- E_1, E_2 ve E_3 düzlemlerinin ortak bir doğrusundan geçmesi için, sırasıyla normalleri

$$\vec{n}_1 = (m, m, 1), \quad \vec{n}_2 = (0, m, -1), \quad \vec{n}_3 = (1, m, 1)$$

olmak üzere

$\det(\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3) = 0$ olmalıdır. Buradan,

$$\begin{vmatrix} m & m & 1 \\ 0 & m & -1 \\ 1 & m & 1 \end{vmatrix} = 2m(m-1) = 0 \Rightarrow m=0 \text{ ve } m=1$$

bulunur.

- $m=1$ olsun. Bu durumda denklemler

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ y-z=-3 \\ x+y+z=1 \end{cases}$$

halini alır ki 1. ve 3. denklem çelişki oluşturur. Bu durumda ortak bir d doğrusu mevcut değildir.

- $m=0$ olsun. Bu durumda denklemler

$$\begin{cases} z=3 \\ z=3 \\ x+z=1 \end{cases}$$

halini alır ki ortak d doğrusunun denklemi

$$\frac{x+2}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z-3}{0}=t$$

bulunur.